

# 1. concours général 2000 - exercice 1

## énoncé

On dispose de  $b$  boules blanches et  $n$  boules noires -au moins une de chaque-, que l'on répartit entre deux urnes de façon qu'aucune d'elle ne soit vide; on note  $s$  le nombre de boules dans la première, et  $r$  celui de ces boules qui sont blanches. L'événement considéré est le tirage d'une boule au hasard dans l'une des urnes choisies au hasard; le but de l'exercice est de déterminer les répartitions rendant maximale la probabilité  $p$  de tirer une boule blanche.

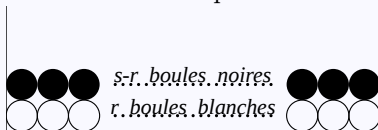
1. Exprimez  $p$  en fonction de  $b$ ,  $n$ ,  $r$  et  $s$ .
2. Dans cette question on fixe la valeur de  $s$ ; comment choisir  $r$  pour augmenter  $p$ ?
3. Résoudre l'exercice.
4. Quelles généralisations proposez-vous en augmentant les nombres de couleurs et d'urnes?

[Énoncé](#)[Solution 1](#)[Solution 2](#)[Page d'accueil](#)[Page de Titre](#)[Page 1 de 8](#)[Retour](#)[Full Screen](#)[Fermer](#)[Quitter](#)

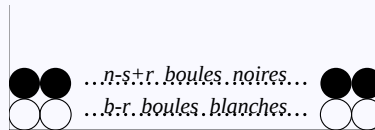
## 2. concours général 2000 - exercice 1

### Solution 1

Étant donné la répartition suivante de boules blanches et noires dans deux urnes :



$s$  boules dans la 1<sup>e</sup> urne,  
dont  $r$  blanches.



$(b+n) - s$  boules dans la 2<sup>e</sup> urne,  
dont  $b-r$  blanches.

Les nombres entiers  $n$ ,  $b$ ,  $r$  et  $s$  vérifient nécessairement les inégalités :

$$1 \leq s \leq b+n-1 \quad ; \quad 0 \leq r \leq \inf(b, s) \quad ;$$

1. Les événements  $X$  : « choisir la première urne » et  $Y$  : « choisir la deuxième urne » étant supposés équiprobables, la probabilité de l'événement  $W$  : « tirer une boule blanche », se décompose de la manière suivante :

$$P(W) = P(W \cap X) + P(W \cap Y)$$

$$P(W) = P(X) \times P(W/X) + P(Y) \times P(W/Y)$$

$$P(W) = \frac{1}{2} \times \frac{r}{s} + \frac{1}{2} \times \frac{b-r}{b+n-s}$$

$$P(W) = \frac{br + nr + bs - 2rs}{2s(b+n-s)}$$

Énoncé

Solution 1

Solution 2

Page d'accueil

Page de Titre

◀ ▶

◀ ▶

Page 2 de 8

Retour

Full Screen

Fermer

Quitter

2. On a  $P(W) = f_s(x) = Ar + B$  où l'on a posé :  $A = \frac{b + n - 2s}{2s(b + n - s)}$  et  $B = \frac{b}{2(b + n - s)}$ .

Pour  $s$  fixé ceci est une fonction affine de  $r$ . Le maximum qu'elle peut atteindre dépend du signe de  $A$  et de son intervalle de définition borné par, le maximum de boules blanches dans la première urne qui est  $\inf(b, s)$  et le minimum qui est  $\sup(0, s - n)$ .

- Si  $b + n - 2s < 0$  ou  $s > \frac{b + n}{2}$ , le taux d'accroissement de  $f_s$  est négatif. La première urne contient plus de la moitié des boules, et  $f_s$  atteint son maximum pour  $r = \sup(0, s - n)$ .
  - Si  $s \leq n$ , le maximum est atteint lorsque  $r = 0$ , toutes les boules dans la première urne sont alors noires, et  $P(W) = \frac{b}{2(b + n - s)}$ . En posant  $s' = b + n - s$  le nombre de boules dans la deuxième urne, ce résultat s'exprime plus simplement par :  $P(W) = \frac{b}{2s'}$ .
  - Si  $s > n$ , le maximum est atteint lorsque  $r = s - n$ , toutes les boules dans la deuxième urne sont blanches et  $P(W) = \frac{s - n}{2s} + \frac{1}{2} = \frac{2s - n}{2s} = 1 - \frac{n}{2s}$ .
- Si  $b + n - 2s > 0$  ou  $s < \frac{b + n}{2}$ , le taux d'accroissement de  $f_s$  est positif. La première urne contient moins de la moitié des boules, et  $f_s$  atteint son maximum pour  $r = \inf(b, s)$ 
  - Si  $s \geq b$ , le maximum est atteint lorsque  $r = b$ , il n'y a que des boules noires dans la deuxième urne et  $P(W) = \frac{b}{2s}$ .
  - Si  $s < b$ , le maximum est atteint lorsque  $r = s$ , toutes les boules dans la première urne sont alors blanches, et  $P(W) = \frac{1}{2} + \frac{b - s}{2(b + n - s)} = \frac{2b + n - 2s}{2(b + n - s)}$ .

Énoncé

Solution 1

Solution 2

Page d'accueil

Page de Titre

◀

▶

◀

▶

Page 3 de 8

Retour

Full Screen

Fermer

Quitter

Avec  $s' = n + b - s$  on obtient une expression plus simple :  $P(W) = \frac{2s' - n}{2s'} =$

$$1 - \frac{n}{2s'}$$

- Si  $b + n - 2s = 0$ ,  $s$  est exactement égal à la moitié du nombre de boules et  $f_s$  est constante, la répartition des boules blanches est alors sans influences sur

$$P(W) = 1 - \frac{n}{2s} = \frac{b}{2s}$$

3. Les probabilités s'expriment par

$$P(W) = \frac{b}{2s} \text{ ou } P(W) = \frac{b}{2s'}$$

lorsque toutes les boules blanches sont dans une seule urne qui contient  $s$  ou  $s' = n + b - s$  boules. Dans ces conditions, la valeur maximum de cette probabilité est obtenue pour  $s$  ou  $s'$  prenant la valeur minimum possible, ce minimum est  $b$  lorsque l'on impose que toutes les boules blanches soient dans cette urne. On obtient alors

$$P(W) = \frac{1}{2}$$

De manière symétrique, les probabilités s'expriment par

$$P(W) = 1 - \frac{n}{2s} \text{ ou } P(W) = 1 - \frac{n}{2s'}$$

lorsque toutes les boules noires sont dans une seule urne qui contient  $s$  ou  $s' = n + b - s$  boules. Elles prennent une valeur maximum pour  $s$  ou  $s'$  prenant la valeur maximum possible ; ce maximum est  $n + b - 1$ , puisque chaque urne doit contenir au moins une boule. Dans ce cas la probabilité de tirer une boule blanche est :

$$1 - \frac{n}{2(n + b - 1)} = \frac{1}{2} + \frac{b - 1}{2(n + b - 1)}$$

Énoncé

Solution 1

Solution 2

Page d'accueil

Page de Titre

◀◀

▶▶

◀

▶

Page 4 de 8

Retour

Full Screen

Fermer

Quitter

Ceci est la probabilité maximum que l'on puisse obtenir car elle est supérieure ou égale à  $\frac{1}{2}$  obtenue dans le cas précédent.

Pour obtenir une probabilité maximum de tirer une boule blanche, il doit donc y avoir une boule blanche dans une urne et toutes les autres boules noires ou blanches dans l'autre urne

Énoncé

Solution 1

Solution 2

Page d'accueil

Page de Titre

◀ ▶

◀ ▶

Page 5 de 8

Retour

Full Screen

Fermer

Quitter

### 3. concours général 2000- exercice 1

Énoncé

Solution 1

Solution 2

Page d'accueil

Page de Titre

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 6 de 8

Retour

Full Screen

Fermer

Quitter

# Solution 2

Concours général 2000

Exercice 1

|              |
|--------------|
| $r$ blanches |
| $s-r$ noires |

$s$  boules

$$s \geq 1$$

|                |
|----------------|
| $b-r$ blanches |
| $n-s+r$ noires |

$b+n-s$  boules

$$b+n-s \geq 1$$

$$b \geq 1 \quad n \geq 1$$

$$1) \quad p = \frac{1}{2} \frac{r}{s} + \frac{1}{2} \frac{b-r}{b+n-s}$$

$$2) \quad \text{Pour } s \text{ fixé, posons } p = f_s(r) = \frac{b+n-s}{2s(b+n-s)} r + \frac{bs}{2s(b+n-s)}$$

$f_s$  est donc une fonction affine, croissante si  $b+n-2s \geq 0$ , décroissante si  $b+n-2s \leq 0$ .

Pour trouver sa plus grande valeur, il faut donc savoir sur quel intervalle varie  $r$ . Or nécessairement

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq b \\ 0 \leq r \leq s \\ 0 \leq s-r \leq n, \text{ donc } s-n \leq r \end{cases}$$

. Si  $b+n-2s \geq 0$ , c'est à dire  $s \leq \frac{b+n}{2}$ ,  $f_s(r)$  atteint son maximum  $\varphi(s)$  quand  $r$  est le plus grand possible :

$$- \text{ si } s \leq b \quad \varphi(s) = f_s(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{b-s}{b+n-s}$$

$$- \text{ si } s \geq b \quad \varphi(s) = f_s(b) = \frac{1}{2} \frac{b}{s}$$

. Si  $b+n-2s \leq 0$ , c'est à dire  $s \geq \frac{b+n}{2}$ ,  $f_s(r)$  atteint son maximum  $\varphi(s)$  quand  $r$  est le plus petit possible :

$$- \text{ si } s \leq n \quad \varphi(s) = f_s(0) = \frac{1}{2} \frac{b}{b+n-s}$$

$$- \text{ si } s \geq n \quad \varphi(s) = f_s(s-n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{s-n}{s}$$

3) Il faut donc comparer  $b$  à  $\frac{b+n}{2}$  et  $n$  à  $\frac{b+n}{2}$ , c'est à dire  $b \geq n$  :

Énoncé

Solution 1

Solution 2

Page d'accueil

Page de Titre

◀ ▶

◀ ▶

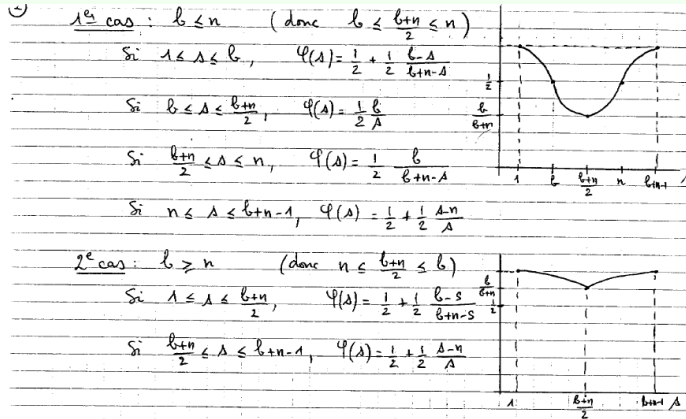
Page 7 de 8

Retour

Full Screen

Fermer

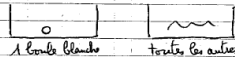
Quitter



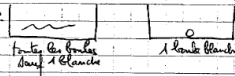
Dans les deux cas, le maximum est atteint pour  $s=1$   
ou pour  $s=b+n-1$ . Il vaut  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{b-1}{b+n-1}$ .

Conclusion :  $p$  est maximal

• soit quand  $n=s=1$  :



• soit quand  $n+n=s=b+n-1$  :



4) S'il y a plusieurs urnes, on remplira le maximum d'urnes  
avec une seule boule blanche.

S'il y a plusieurs couleurs : ?