1. concours général 1995 - exercice 5

énoncé

Soit f une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.
Démontrer que l'on peut trouver trois entiers naturels a, b, c vérifiant :

$$a < b < c \quad \text{et} \quad f(a) + f(c) = 2f(b).$$

2. concours général 1995 - exercice 5

Solution 1

Dans le diagramme suivant, représentant l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & \cdots & m_1 & \cdots & m_2 & \cdots & m_3 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ f(0) & f(1) & \cdots & n_1 & \cdots & n_2 & \cdots & n_3 & \cdots \end{array}$$

chaque entier naturel apparaît une fois exactement sur la deuxième ligne, car f est une bijection. Je dirai que l'entier naturel n_1 est « à gauche » de l'entier naturel n_2 pour signifier qu'il figurent ainsi sur la deuxième ligne du diagramme, c'est-à-dire que $m_1 = f^{-1}(n_1) < f^{-1}(n_2) = m_2$.

De façon évidente, si n_1 est à gauche de n_2 et n_2 est à gauche de n_3 alors n_1 est à gauche de n_3 (en termes mathématiques, il s'agit d'une relation d'ordre). Je dirai aussi bien « n_1 est à gauche de n_2» que « n_2 est à droite de n_1 ».

La condition $f(a) + f(c) = 2f(b)$ étant équivalente à $f(b) - f(a) = f(c) - f(b)$, le problème posé revient à trouver trois entiers α, β, γ en progression arithmétique tels que α soit à gauche de β et β à gauche de γ :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & a & \cdots & b & \cdots & c & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots & \alpha & \cdots & \beta & \cdots & \gamma & \cdots \end{array}$$

Je m'aperçois que $\alpha = 0$ peut convenir si je trouve un entier β à droite de 0 et à gauche de 2β :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & a & \cdots & b & \cdots & c & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots & 0 & \cdots & \beta & \cdots & 2\beta & \cdots \end{array}$$

Page d'accueil
Page de Titre
Page 2 de 3
Retour
Full Screen
Fermer
Quitter

Je peux m'assurer que β et 2β sont à droite de 0 en choisissant $\beta > n_0$, plus grand entier à gauche de 0 (ou $n_0 = 0$ si $a = 0$).

Que se passe-t-il si on ne peut pas trouver $\beta > n_0$ qui soit à gauche de 2β ? Alors pour tout $n > n_0$ (et donc $n \geq 1$), $2n$ est à gauche de n et à droite de 0 ; mais alors $4n$ est à gauche de $2n$, $8n$ est à gauche de $4n$, etc.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & a & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & m & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots & 0 & \cdots & 8n & \cdots & 4n & \cdots & 2n & \cdots & n & \cdots \end{array}$$

ce qui est absurde car il n'y a qu'un nombre fini de places entre 0 et n.

Je peux donc trouver un tel β et les entiers $a = f^{-1}(0)$, $b = f^{-1}(\beta)$ et $c = f^{-1}(2\beta)$ sont une solution du problème.

Remarque. En modifiant légèrement ce procédé, on peut en fait choisir arbitrairement a ; de façon analogue, on construit en posant $u_{p+1} = 2u_p - f(a)$ une suite infinie d'entiers naturels ne pouvant pas aller indéfiniment vers la gauche ; on a ainsi non seulement l'existence de b et c mais aussi un algorithme pour leur recherche.