

1. concours général 1995 - exercice 4

énoncé

Soient $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ six points du plan tels que l'on ait :
pour tous les entiers i et j de $\{1, 2, 3\}$ $A_i B_j = i + j$.

Que dire de ces six points ?

Énoncé

Solution 1

Page d'accueil

Page de Titre



Page 1 de 5

Retour

Full Screen

Fermer

Quitter

2. concours général 1995 - exercice 4

Solution 1

Pour les triangles $A_{i_1}A_{i_2}B_j$ ou $A_iB_{j_1}B_{j_2}$, deux côtés sur trois sont connus. Les inégalités triangulaires permettent d'encadrer le troisième côté ; par exemple

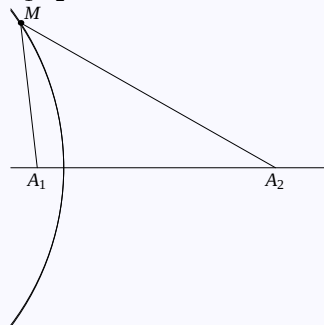
$$|A_1B_j - A_2B_j| \leq A_1A_2 \leq A_1B_j + A_2B_j, \quad (1)$$

ce qui donne au mieux, pour $j = 1$:

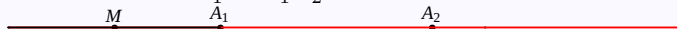
$$1 \leq A_1A_2 \leq 5$$

et de même pour les autres côtés. Je remarque que $A_1B_j - A_2B_j$ ne dépend pas de j et je fais le lien avec la définition bifocale de l'hyperbole. La condition $MA_2 - MA_1 = 1$ définit

- une branche d'hyperbole si $A_1A_2 > 1$:

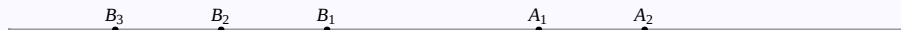


- une demi-droite d'extrémité A_1 si $A_1A_2 = 1$:



Examinons tout de suite ce cas particulier. Les points B_j sont sur une même demi-droite, donc alignés. L'encadrement (1) est une égalité à gauche, donc le triangle $A_1A_2B_j$

est aplati ; les cinq points A_1, A_2, B_1, B_2, B_3 sont donc alignés et l'on connaît toutes leurs distances deux à deux ; on arrive alors, A_1 et A_2 étant fixés avec un écart unité, à la configuration :



et la distance de A_3 aux B_j impose alors sa position, d'où à déplacement près, une unique configuration $\mathcal{C}_0$ qui répond visiblement au problème :



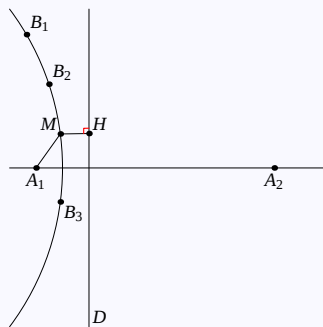
Je recherche maintenant d'autres configurations en supposant $A_1A_2 > 1$. Ainsi les points B_1, B_2, B_3 sont sur une même branche d'hyperbole $\mathcal{H}_{A_1A_2}$ de foyers A_1 et A_2 .

De la même façon, les points B_j sont sur une hyperbole $\mathcal{H}_{A_2A_3}$ de foyers A_2 et A_3 et sur une hyperbole $\mathcal{H}_{A_3A_1}$ de foyers A_3 et A_1 .

Je peux introduire un repère orthonormé $\mathcal{R}$ dont A_1A_2 est l'axe des x , dans lequel $\mathcal{H}_{A_1A_2}$ a une équation du type

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

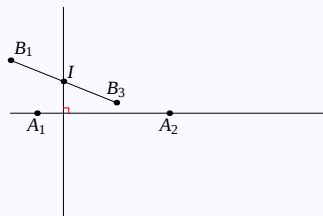
et chercher B_j comme intersection de $\mathcal{H}_{A_1A_2}$ avec le cercle de centre A_1 , de rayon $j + 1$. Je peux aussi éviter ces calculs en introduisant la directrice D de $\mathcal{H}_{A_1A_2}$, relative au foyer A_1 :



La définition monofocale de l'hyperbole se traduit par $\frac{MA_1}{MH} = e$, excentricité. Pour $M = B_j$, j'en tire la distance de B_j à D :

$$d(B_j, D) = \frac{j+1}{e}$$

et en particulier les abscisses dans $\mathcal{R}$ des points B_1, B_2, B_3 sont en progression arithmétique de raison $1/e$; les ordonnées sont a priori plus compliquées. Pour pouvoir confronter ce résultat avec son analogue pour l'hyperbole $\mathcal{H}_{A_1 A_3}$, je le formule différemment : le point B_2 se trouve sur la perpendiculaire à $(A_1 A_2)$ passant par le milieu I de $[B_1 B_3]$.



De la même façon, le point B_2 se trouve sur la perpendiculaire à (A_1A_3) passant par I .

Si A_1, A_2, A_3 ne sont pas alignés, B_2 est alors à l'intersection de deux droites distinctes issues de I , c'est-à-dire que $B_2 = I$, milieu de $[B_1B_3]$. Mais une droite ne peut couper une hyperbole qu'en deux points au plus et les B_j sont alignés et distincts (voir leurs distances à A_1); donc j'aboutis à une absurdité.

Ainsi A_1, A_2, A_3 doivent être alignés. Je reprends maintenant le travail déjà fait en inversant les rôles des A et des B . Si $B_1B_2 = 1$, c'est la configuration $\mathcal{C}_0$. Si $B_1B_2 > 1$, les points A_i sont sur une même branche d'hyperbole; or ils sont distincts et alignés, contradiction.

Conclusion : la configuration $\mathcal{C}_0$ de la figure 4, définie à un déplacement près, est l'unique possibilité.

[Page d'accueil](#)[Page de Titre](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 5 de 5](#)[Retour](#)[Full Screen](#)[Fermer](#)[Quitter](#)