1. concours général 1991 - exercice 1

énoncé

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que, pour tout nombre entier naturel n :
$$x_0^3 + x_1^3 + \cdots + x_n^3 = (x_0 + x_1 + \cdots + x_n)^2.$$
Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un entier naturel m tel que :
$$x_0 + x_1 + \cdots + x_n = \frac{m(m+1)}{2}.$$

2. Si n et p sont deux nombres entiers naturels non nuls, on pose :
$$S_{n,p} = 1^p + 2^p + \cdots + n^p.$$
Déterminer les entiers naturels non nuls p tels que, quel que soit l'entier naturel non nul n, $S_{n,p}$ soit le carré d'un nombre entier naturel.

2. concours général 1991 - exercice 1

Solution 1

1. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels.
On va montrer la propriété par récurrence.

Soit la proposition $P(n)$ « $\exists m \in \mathbb{N}, x_0 + x_1 + ...x_n = \dfrac{m\,(m+1)}{2}$ »

• $P(0)$ est vraie : $x_0^3 = x_0^2 {:} x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$, il suffit de prendre $m = 0$ dans le premier cas, $m = 1$ dans le second.

• Supposons $P(n)$ vraie pour $m \in \mathbb{N}$ fixé :

$$\begin{aligned}
x_0^3 + ... + x_n^3 + x_{n+1}^3 &= (x_0 + ... + x_n)^2 + x_{n+1}^3 \\
&= \left[\frac{m\,(m+1)}{2}\right]^2 + x_{n+1}^3 \\
&= (x_0 + ...x_{n+1})^2 \\
&= \left(\frac{m\,(m+1)}{2} + x_{n+1}\right)^2 \\
&= \left[\frac{m\,(m+1)}{2}\right]^2 + x_{n+1}^2 + x_{n+1}m(m+1)
\end{aligned}$$

D'où $\left[\dfrac{m\,(m+1)}{2}\right]^2 + x_{n+1}^3 = \left[\dfrac{m\,(m+1)}{2}\right]^2 + x_{n+1}^2 + x_{n+1}m(m+1)$
Soit $x_{n+1} = 0$
soit si $x_{n+1} \neq 0, x_{n+1}^2 - x_{n+1} - m(m+1) = 0$
$\Delta = 1 + 4m(m+1) = 4m^2 + 4m + 1 = (2m+1)^2$

d'où $x_{n+1} = m+1$ ou $x_{n+1} = -m$

• Dans le cas où $x_{n+1} = 0, P(n+1)$ est évidente

• Dans le cas où $x_{n+1} = m+1$ alors

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 + ...x_n &= \frac{m(m+1)}{2} + m + 1 \\ &= (m+1)\frac{(m+2)}{2} \\ &= \frac{(m+1)(m+2)}{2} \end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ est vraie

• Dans le cas où $x_{n+1=-m}$ alors $x_0 + x_1 + ...x_n = \dfrac{m(m-1)}{2}$

Si $m = 0$ alors $P(n+1)$ est vraie

Si $m > 0, m-1 \in \mathbb{N}$ donc $P(n+1)$ est vraie

Conclusion : Dans tous les cas $P(n+1)$ est vraie, on en déduit que $P(n)$ est vraie quelque soit $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $Q(p)$ la proposition :$\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, S_{n,p} = m^2 \quad p$ étant fixé, entier naturel non nul.

On va montrer que $Q(p)$ est vraie $\Leftrightarrow p = 3$

• $\Leftarrow$

On sait que $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2... + n)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Or $1 + 2... + n \in \mathbb{N}$, donc $Q(3)$ est vraie.

•:

$$\begin{aligned} Q(p) est vraie \quad & donc \quad \exists m \in \mathbb{N}, S_{2,p} = m^2 \\ & donc \quad \exists m \in \mathbb{N}, 1 + 2^p = m^2 \end{aligned}$$

alors on aura $2^p = m^2 - 1 = (m+1)(m-1)$
$m+1$ et $m-1$ sont donc soit égaux à 1 soit de la forme 2^a où $a \in \mathbb{N}$.
Or $m-1=1$ donc $m=2$ et $m+1=3$ ce qui est impossible
$m+1=1$ donc $m=0$ et $m-1=-1$ ce qui est impossible.
d'où $\quad \exists\,(a,b) \in N^{*2}, m+1 = 2^a = m-1+2 = 2^b+2$ alors $2^{a-1} = 2^{b-1}+1$
On a donc nécessairement $2^{b-1}=1$ donc $b-1=0$ soit $b=1$ d'où $a=2$
On a donc $m-1=2^b=2$ d'où $m=3$ alors $2^p = 4\times 2 = 8 = 2^3$ d'où $p=3$ donc on a bien $Q(p)$ est vraie d'où $p=3$
Conclusion : Le seul entier naturel p non nul qui vérifie « $\forall n \in \mathbb{N}, S_{n,p}$ est un carré parfait », est l'entier 3.